Le cours avec les aides animées

Q1. Dans un triangle rectangle, comment appelle-t-on le côté opposé à l'angle droit ?

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'hypoténuse.

Q2. Connaissant les longueurs des trois côtés d'un triangle, quel est celui qui pourrait être l'hypoténuse s'il était rectangle ?

Si un triangle est rectangle le plus grand côté est l'hypoténuse.

Q3. Cite la réciproque du théorème de Pythagore. Quelles sont les données nécessaires pour l'appliquer et à quoi sert ce théorème ?

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle et admet ce plus grand côté pour hypoténuse.

Il faut avoir les longueurs des 3 côtés du triangle pour appliquer la réciproque du théorème de Pythagore.

Il sert à montrer qu'un triangle est rectangle.

Les exercices d'application

1 *À la recherche des triangles rectangles*

a. $AB^2 = AC^2 + CB^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore,

le triangle ABC est rectangle en C.

b. $MR^2 = ME^2 + RE^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore,

le triangle MER est rectangle en E.

c. $OI^2 = EO^2 + EI^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore,

le triangle OIE est rectangle en E.

2 *Démontrer qu'un triangle est rectangle*

Le triangle ABC est tel que AB = 17 cm, AC = 15 cm et BC = 8 cm.

a. Si ABC est un triangle rectangle, son hypoténuse ne peut être que le côté [AB] car c'est le côté le plus grand. Donc, si ABC est rectangle, il ne pourra l'être qu'en C.

b. Démontre que le triangle ABC est un triangle rectangle.

Dans le triangle ABC, [AB] est le côté le plus grand.

On calcule séparément AB^2 et $CA^2 + CB^2$.

$AB^2 = 17^2$	$CA^2 + CB^2 = 15^2 + 8^2$
$AB^2 = 289$	$CA^2 + CB^2 = 225 + 64$
	$CA^2 + CB^2 = 289$

On constate que $AB^2 = CA^2 + CB^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore,

le triangle ABC est rectangle en C.

3 *Démontrer qu'un triangle est rectangle (bis)*

Démontre que le triangle MER tel que

ME = 2,21 m, ER = 0,6 m et MR = 2,29 m est rectangle et précise en quel point.

Aide-toi de l'exercice précédent.

Dans le triangle MER, [MR] est le côté le plus grand.

On calcule séparément MR^2 et $EM^2 + ER^2$.

$MR^2 = 2{,}29^2$	$EM^2 + ER^2 = 2{,}21^2 + 0{,}6^2$
$MR^2 = 5{,}2441$	$EM^2 + ER^2 = 4{,}8841 + 0{,}36$
	$EM^2 + ER^2 = 5{,}2441$

On constate que $MR^2 = EM^2 + ER^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore,

le triangle MER est rectangle en E.

4 *À toi de jouer !*

En rédigeant correctement, démontre que les triangles suivants sont rectangles.

a. Le triangle OIE tel que :
OI = 9,7 cm ; IE = 6,5 cm et OE = 7,2 cm.

Dans le triangle OIE, [OI] est le côté le plus grand.

On calcule séparément OI^2 et $EO^2 + EI^2$

$OI^2 = 9,7^2$	$EO^2 + EI^2 = 7,2^2 + 6,5^2$
$OI^2 = 94,09$	$EO^2 + EI^2 = 51,54 + 42,25$
	$EO^2 + EI^2 = 94,09$

On constate que $OI^2 = EO^2 + EI^2$

Donc d'après la r&éciproque du théorème de Pythagore,

le triangle OIE est rectangle en E.

b. Le triangle IDF tel que :
ID = 6,56 ; DF = 1,44 et IF = 6,4 (en dm).

Dans le triangle IDF, [DI] est le côté le plus grand.

On calcule séparément DI^2 et $FD^2 + FI^2$.

$DI^2 = 6,56^2$	$FD^2 + FI^2 = 1,44^2 + 6,4^2$
$DI^2 = 43,0336$	$FD^2 + FI^2 = 2,0736 + 40,96$
	$FD^2 + FI^2 = 43,0336$

On constate que $DI^2 = FD^2 + FI^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore,

le triangle IDF est rectangle en F.

5 *Comparaison : attention !*

a. Dans un triangle ABC, après avoir fait un calcul, on sait que : $AC^2 = 24$. Complète :

AC = $\sqrt{24}$ soit AC ≈ 4,90 cm.

On connaît également les longueurs :
AB = 5 cm et BC = 7 cm.

Observe ci-dessous les calculs qu'ont faits Chloé et Abdel :

Calculs de Chloé :	Calculs d'Abdel :
$BC^2 = 7^2 = 49$	$BC^2 = 7^2 = 49$
$AB^2 + AC^2 = 5^2 + 4,9^2$	$AB^2 + AC^2 = 5^2 + 24$
$= 25 + 24,01$	$= 25 + 24$
$= 49,01$	$= 49$
donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$	donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Écris la conclusion de Chloé.

On constate que $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$

Donc d'après le théorème de Pythagore,

le triangle ABC n'est pas rectangle.

Écris la conclusion d'Abdel.

On constate que $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

Connais-tu la valeur exacte de AC sous forme décimale ?

Non.

Quelle est la valeur exacte de AC^2 ?

$AC^2 = 24$.

Qui a donc fait l'erreur et pourquoi ?

Chloé a fait l'erreur car elle a pris pour AC une valeur approchée (AC ≈ 4,9 et non AC = $\sqrt{24}$)

b. Dans un autre exercice, après un calcul, on trouve $RT^2 = 128$ et on sait d'autre part que

RS = 1,6 cm et TS = 11,2 cm.

Aide Chloé et Abdel à démontrer que RST est un triangle rectangle. Tu préciseras en quel point.

Dans le triangle RST, [RT] est le côté le plus grand.

On calcule séparément RT^2 et $SR^2 + ST^2$.

$RT^2 = 128$	$SR^2 + ST^2 = 1,6^2 + 11,2^2$
	$SR^2 + ST^2 = 2,56 + 125,44$
	$SR^2 + ST^2 = 128$

On constate que $RT^2 = SR^2 + ST^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle IDF est rectangle en S.

G1 - Triangle rectangle

Série 3 - Réciproque du théorème de Pythagore

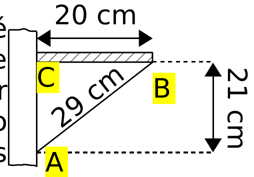
6 *Rédaction*

On donne : XY = 12 ; YZ = 5 et XZ = 13 (en cm).
Voici la rédaction d'un élève :
« $XZ^2 = XY^2 + YZ^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$ donc $XZ^2 = 169$ et $XZ = \sqrt{169} = 13$ cm donc XYZ est rectangle. ».
Explique pourquoi cette rédaction est fausse.

Parce que les calculs ne sont pas effectués séparément: on ne doit pas avoir $XZ^2 = XY^2 + YZ^2$ au début car on ne sait pas si c'est vrai ou pas, on le constate après calculs.

7 *Bricolage*

Pour vérifier s'il a bien posé une étagère de 20 cm de profondeur sur un mur parfaitement vertical, M. Brico a pris les mesures marquées sur le schéma.



Son étagère est-elle parfaitement horizontale ?

Dans le triangle ABC, [AB] est le côté le plus grand.

On calcule séparément AB^2 et $CA^2 + CB^2$.

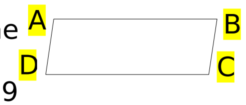
$AB^2 = 29^2$	$CA^2 + CB^2 = 21^2 + 20^2$
$AB^2 = 841$	$CA^2 + CB^2 = 441 + 400$
	$CA^2 + CB^2 = 841$

On constate que $AB^2 = CA^2 + CB^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C, donc l'étagère est parfaitement horizontale car elle est perpendiculaire au mur qui est parfaitement vertical.

8 *Rectangle ou non ?*

Soit ABCD un parallélogramme (unité : le mètre).



a. On a : AB = 8,8 ; BC = 77,19 et AC = 77,69. ABCD est-il un rectangle ?

Dans le triangle ABC, [AC] est le côté le plus grand.

On calcule séparément AC^2 et $BA^2 + BC^2$.

$AC^2 = 77{,}69^2$	$BA^2 + BC^2= 8{,}8^2 + 77{,}19^2$
$AC^2 =6035{,}7361$	$BA^2 + BC^2 = 77{,}44 + 5958{,}2961$
	$BA^2 + BC^2 = 6035{,}7361$

On constate que $AC^2 = BA^2 + CB^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle. Donc ABCD est un rectangle.

b. On a cette fois : AB = 7,6 ; BC = 90,41 et AC = 90,09. Explique pourquoi, sans calcul, on peut conclure que ABCD n'est pas un rectangle.

Dans le triangle ABC, [BC] est le côté le plus grand.

Donc le triangle ABC ne pourrait être rectangle qu'en A. Donc $\widehat{DAB}$ n'est pas un angle droit, donc ce parallélogramme n'est pas un rectangle.

9 *Rayon du cercle circonscrit*

a. Pour quel type de triangle peut-on calculer la valeur du rayon de son cercle circonscrit à partir de l'un de ses côtés ?

Pour un triangle rectangle: le rayon est égal à la moitié de l'hypoténuse.

b. Calcule le rayon du cercle circonscrit au triangle dont les trois côtés mesurent en cm: 16 ; 63 et 65.

On calcule séparément 65^2 et $16^2 + 63^2$.

$65^2 = 4225$	$16^2 + 63^2 = 256 + 3969$
	$16^2 + 63^2 = 4225$

On constate que $65^2 = 16^2 + 63^2$

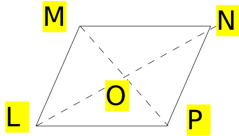
Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle .

Donc son cercle circonscrit a pour rayon la moitié de 65, soit 32,5 cm.

10 *Nature d'un quadrilatère*

MNPL est un parallélogramme de centre O tel que ML = 68 mm ; MP = 64 mm et LN = 120 mm.

a. Fais un schéma à main levée.



b. Que représente le point O pour les diagonales du parallélogramme MNPL ?

Le point O est le milieu des diagonales [MP] et [LN]. Donc $OM = \frac{MP}{2} = \frac{64}{2}$, soit OM = 32 mm

et $OL = \frac{NL}{2} = \frac{120}{2}$, soit OL = 60 mm.

c. Démontre que les diagonales de MNPL sont perpendiculaires.

Dans le triangle LMO, [LM] est le côté le plus grand.

On calcule séparément LM^2 et $OL^2 + OM^2$.

$LM^2 = 68^2$	$OL^2 + OM^2 = 60^2 + 32^2$
$LM^2 = 4624$	$OL^2 + OM^2 = 3600 + 1024$
	$OL^2 + OM^2 = 4624$

On constate que $LM^2 = OL^2 + OM^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle LMO est rectangle en O.

Donc les diagonales sont perpendiculaires.

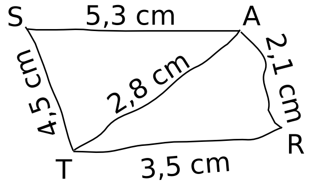
d. Déduis-en la nature particulière de MNPL.

Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un losange.

Donc MNPL est un losange.

11 *Parallèles*

Voici un schéma à main levée de deux triangles TAS et RAT dont les mesures réelles sont indiquées dessus.



a. Démontre que AST est un triangle rectangle.

Dans le triangle AST, [AS] est le côté le plus grand.

On calcule séparément AS² et TA² + TS².

$AS^2 = 5,3^2$	$TA^2 + TS^2 = 2,8^2 + 4,5^2$
$AS^2 = 28,09$	$TA^2 + TS^2 = 7,84 + 20,25$
	$TA^2 + TS^2 = 28,09$

On constate que $AS^2 = TA^2 + TS^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AST est rectangle en T.

b. Démontre que ART est un triangle rectangle.

Dans le triangle ART, [TR] est le côté le plus grand.

On calcule séparément TR² et AT² + AR².

$TR^2 = 3,5^2$	$AT^2 + AR^2 = 2,8^2 + 2,1^2$
$TR^2 = 12,25$	$AT^2 + AR^2 = 7,84 + 4,41$
	$AT^2 + AR^2 = 12,25$

On constate que $TR^2 = AT^2 + AR^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ART est rectangle en A.

c. Déduis-en que les droites (ST) et (AR) sont parallèles.

- Le triangle AST est rectangle en T,

  donc (ST) et (AT) sont perpendiculaires.

- Le triangle ART est rectangle en A,

  donc (AR) et (AT) sont perpendiculaires.

Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

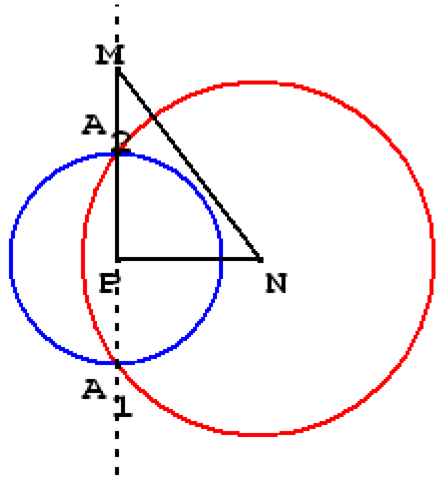
Donc (ST) et (AR) sont perpendiculaires.

12 *Points alignés ?*

MNP est un triangle rectangle en P tel que MP = 4,8 cm et NP = 3,6 cm.

Le point A est tel que NA = 4,5 cm et PA = 2,7 cm.

a. Trace au brouillon plusieurs figures en vraie grandeur vérifiant les conditions ci-dessus.



b. Sur les figures obtenues, que remarques-tu ?

A se trouve sur la droite (MP).

c. La conjecture précédente est-elle vraie ? Justifie ta réponse.

Dans le triangle NPA, [AN] est le côté le plus grand.

On calcule séparément AN² et PA² + PN².

$AN^2 = 4,5^2$	$PA^2 + PN^2 = 2,7^2 + 3,6^2$
$AN^2 = 20,25$	$PA^2 + PN^2 = 7,29 + 12,96$
	$PA^2 + PN^2 = 20,25$

On constate que $AN^2 = PA^2 + PN^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle NPA est rectangle en P

donc (PA) et (NP) sont perpendiculaires.

De plus, le triangle MNP est rectangle en P, donc (MP) et (NP) sont perpendiculaires.

Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elle.

Donc les droites (PA) et (MP) sont parallèles.

Elles passent par le point P. Donc elles sont confondues.

Donc les points A, P et M sont alignés.