G1 - Triangle rectangle

Le cours avec les aides animées

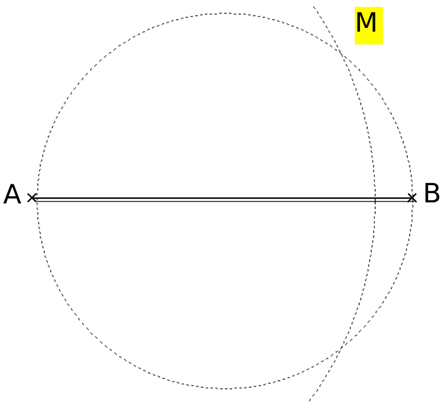
Q1. Dresse la liste de toutes les propriétés du chapitre qui permettent de démontrer qu'un triangle est rectangle. Pour chacune d'elle, précise les données nécessaires pour pouvoir l'appliquer.

Q2. Dresse la liste de toutes les propriétés du chapitre qui permettent de calculer une longueur.

Les exercices d'application

1 *Cercle et longueur*

Construis ci-dessous un point M appartenant au cercle de diamètre [AB] (AB = 5 cm) tel que AM = 4,5 cm.



a. Quelle est la nature du triangle AMB ? Justifie.

Données : M appartient au cercle de diamètre [AB].

Propriété : Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés alors ce triangle est rectangle et admet ce diamètre pour hypoténuse.

Conclusion : AMB est un triangle rectangle en M.

b. Calcule la longueur de [MB]. Tu en donneras la valeur arrondie au mm.

AMB est un triangle rectangle en M

D'après le théorème de Pythagore,

on a : $AB^2 = MA^2 + MB^2$.

Donc $MB^2 = AB^2 - MA^2$

$MB^2 = 5^2 – 4{,}5^2$

$MB^2 = 25 – 20{,}25$

$MB^2 = 4{,}75$

MB = $\sqrt{4{,}75}$ soit MB ≈ 2,18 cm

c. Vérifie la cohérence de ton calcul sur la figure.

On mesure sur la figure avec la règle.

2 *Calculs de longueurs*

Dans le triangle OIE rectangle en I, P est le milieu de [OE], OI = 2 cm et PI = 3 cm.

a. Calcule la longueur OE.

Données : Le triangle OIE est rectangle en I.

P étant le milieu du segment [ED], on en déduit que [IP] est la médiane relative à l'hypoténuse.

Propriété : Si un triangle est rectangle alors la médiane issue du sommet de l'angle droit a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

Conclusion : OE = 2 × P soit OE = 6 cm.

b. Calcule la longueur IE arrondie au mm.

Le triangle OIE est rectangle en I.

D'après le théorème de Pythagore,

on a : $OE^2 = IO^2 + IE^2$.

Donc $IE^2 = OE^2 - IE^2$

$IE^2 = 6^2 – 2^2$

$IE^2 = 36 – 4$

$IE^2 = 32$

IE = $\sqrt{32}$ soit IE ≈ 5,7 cm

3 *Triangle et cercle*

RS = 32 cm ; ST = 40 cm et RT = 24 cm.

a. Montre que le triangle RST est rectangle en R.

Dans le triangle RST, [ST] est le côté le plus grand.

On calcule séparément ST^2 et $RS^2 + RT^2$.

$ST^2 = 40^2$	$RS^2 + RT^2 = 32^2 + 24^2$
$ST^2 = 1600$	$RS^2 + RT^2 = 1024 + 576$
	$RS^2 + RT^2 = 1600$

On constate que $ST^2 = RS^2 + RT^2$.

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RST est rectangle en R.

b. Déduis-en que R appartient au cercle de diamètre [ST].

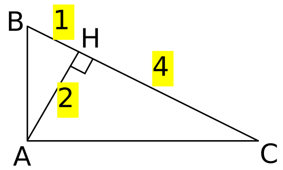
Données : le triangle RST est rectangle en R

Propriété : Si un triangle est rectangle alors son cercle circonscrit a pour diamètre son hypoténuse.

Conclusion : R appartient au cercle de diamètre [ST].

4 *Comparaison : attention ! Épisode ultime*

Sur la figure ci-contre, B, H et C sont alignés ; les droites (BC) et (AH) sont perpendiculaires.



On donne : AH = 2 cm ; BH = 1 cm et HC = 4 cm.

a. Calcule AB et AC. Arrondis au mm.

Calcul de AB :	Calcul de AC :
Dans le triangle ABH rectangle en H,	Dans le triangle ACH rectangle en H,
d'après le théorème de Pythagore, on a :	d'après le théorème de Pythagore, on a :
$AB^2 = HA^2 + HB^2$	$AC^2 = HA^2 + HC^2$
$AB^2 = 2^2 + 1^2$	$AC^2 = 2^2 + 4^2$
$AB^2 = 4 + 1$	$AC^2 = 4 + 16$
$AB^2 = 5$	$AC^2 = 20$
$AB = \sqrt{5}$	$AC = \sqrt{20}$
soit AB ≈ 2,2 cm	soit AC ≈ 4,5 cm.

b. Le triangle ABC est-il rectangle ?

Dans le triangle ABC, [BC] est le côté le plus grand

On calcule séparément BC^2 et $AB^2 + AC^2$

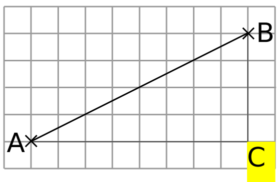
$BC^2 = (1 + 4)^2$	$AB^2 + AC^2 = 5 + 20$
$BC^2 = 5^2 = 25$	$BA^2 + BC^2 = 25$

On constate que $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

5 *Utiliser un quadrillage*

Place ci-contre un point C judicieusement pour que ABC soit rectangle en C.



L'unité est la longueur du côté d'un carreau. On a :

AC = 8 et BC = 4 .

Calcule AB (donne l'arrondi au dixième).

Dans le triangle ABC rectangle en C,

d'après le théorème de Pythagore, on a

$AB^2 = CA^2 + CB^2$

$AB^2 = 8^2 + 4^2$

$AB^2 = 64 + 16$

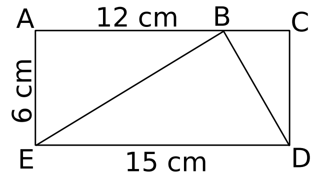
$AB^2 = 80$

$AB = \sqrt{80}$ soit AB ≈ 8,9

6 *Dans un rectangle*

ACDE est un rectangle.

On veut savoir si le triangle BED ci-contre est rectangle.



a. Quelle est la nature des triangles ABE et BCD ?

ABE est rectangle en A, BCD est rectangle en C.

b. Calcule BE^2 et BD^2.

Dans ABE rectangle en A	Dans BCD rectangle en C
D'après le théorème de Pythagore, on a :	D'après le théorème de Pythagore, ona:
$BE^2 = AB^2 + AE^2$	$BD^2 = CB^2 + CD^2$
$BE^2 = 12^2 + 6^2$	$BD^2 = 3^2 + 6^2$
$BE^2 = 144 + 36$	$BD^2 = 9 + 36$
$BE^2=180$	$BD^2=45$

c. Le triangle BED est-il rectangle ?

Dans le triangle BED, [DE] est le côté le plus grand

On calcule séparément DE^2 et $BD^2 + BE^2$

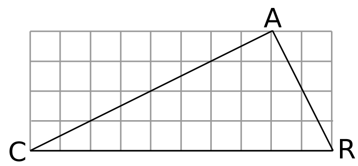
$DE^2 = 15^2$	$BD^2 + BE^2 = 45 + 180$
$DE^2 = 225$	$BD^2 + BE^2 = 225$

On constate que $DE^2 = BD^2 + BE^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle BDE est rectangle en B.

7 *Avec un quadrillage*

Le triangle CAR ci-contre est-il rectangle ?



RC = 10 (longueurs du côté d'un carreau) ;

• Calcul de AC^2 et de AR^2.

D'après le théorème de Pythagore, on a:

$AC^2 = 4^2 + 8^2$	$AR^2 = 2^2 + 4^2$
$AC^2 = 16 + 64$	$AR^2 = 4 + 16$
$AC^2 = 80$	$AR^2 = 20$

Dans le triangle ACR, [CR] est le côté le plus grand

• On calcule séparément CR^2 et $AC^2 + AR^2$

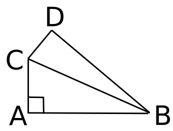
$CR^2 = 10^2$	$AC^2 + AR^2 = 80 + 20$
$CR^2 = 100$	$AC^2 + AR^2 = 100$

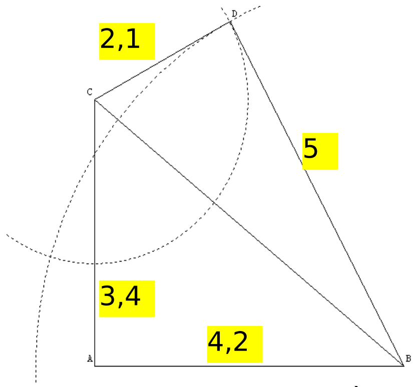
On constate que $CR^2 = AC^2 + AR^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle CAR est rectangle en A.

8 *Sur un cercle ?*

Construis la figure ci-contre en vraie grandeur :
AB = 4,2 cm ; AC = 3,4 cm ; CD = 2,1 cm et BD = 5 cm.





a. Calcule l'arrondi de BC au dixième.

Dans le triangle ABC rectangle en A,

D'après le théorème de Pythagore, on a

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 4,2^2 + 3,4^2$

$BC^2 = 17,64 + 11,56$

$BC^2 = 29,2$

$BC = \sqrt{29,2}$

$BC \approx 5,4$ cm

b. Le triangle CDB est-il rectangle ?

Dans le triangle BCD, [BC] est le côté le plus grand

On calcule séparément BC^2 et $DB^2 + DC^2$

$BC^2 = 29,2$	$DB^2 + DC^2 = 5^2 + 2,1^2$
	$DB^2 + DC^2 = 25 + 4,41$
	$DB^2 + DC^2 = 29,41$

On constate que $BC^2 \neq DB^2 + DC^2$

Donc d'après le théorème de Pythagore, le triangle BCD n'est pas rectangle.

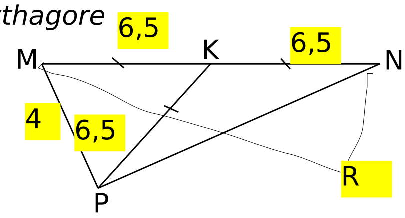
c. Les points A, B, C et D sont-ils cocycliques (c'est-à-dire situés sur un même cercle) ? Si oui, précise le centre et le rayon de ce cercle.

Le triangle ABC est rectangle en A, donc les points A, B et C sont sur le cercle de diamètre [BC].

Mais le triangle BCD n'étant pas rectangle, les points B, C et D ne peuvent pas se trouver sur le cercle de diamètre [BC].

9 *Médiane et Pythagore*

K ∈ [MN] ;
MP = 4 cm ;
KP = 6,5 cm et
MK = PK = NK.



a. Démontre que le triangle MPN est rectangle.

Données : KP = KM = KN et K ∈ [MN]

donc P appartient au cercle de diamètre [MN].

Propriété : Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés alors ce triangle est rectangle et admet ce diamètre pour hypoténuse.

Conclusion : le triangle MPN est rectangle en P.

b. Calcule PN (valeur arrondie au dixième de centimètre).

Dans le triangle MPN rectangle en P,

D'après le théorème de Pythagore, on a

$MN^2 = PM^2 + PN^2$

$PN^2 = MN^2 - PM^2$

$PN^2 = 13^2 - 4^2$

$PN^2 = 169 - 16$

$PN^2 = 153$

$PN = \sqrt{153}$, soit $PN \approx 12,4$ cm.

c. R est un point tel que RM = 12 cm et

RN = 5 cm.
Le point R appartient-il au cercle de centre K passant par P ?

Dansle triangle MNR,[MN] est le côté le plus grand

On calcule séparément MN^2 et $RM^2 + RN^2$

$MN^2 = 13^2$	$RM^2 + RN^2 = 12^2 + 5^2$
$MN^2 = 169$	$RM^2 + RN^2 = 144 + 25$
	$RM^2 + RN^2 = 169$

On constate que $MN^2 = RM^2 + RN^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MNR est rectangle en R.

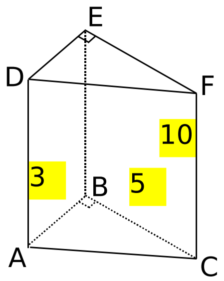
Si un triangle est rectangle alors son cercle circonscrit a pour diamètre son hypoténuse.

Donc MNR est inscrit dans le cercle de diamètre [MN].

Donc R appartient au cercle de diamètre [MN], c'est-à-dire au cercle de centre K passant par P.

10 *Dans l'espace*

On considère le prisme droit ci-contre : sa base ABC est un triangle rectangle en B.



a. Quelle est la nature des faces latérales de ce prisme ?

Ce sont des rectangles.

b. Déduis-en la nature des triangles ACF et ABE.

ACF est rectangle en C et ABE est rectangle en B.

On donne les dimensions suivantes : AB = 3 cm ; BC = 5 cm et FC = 10 cm.

c. Quelles sont les mesures des segments [BE] et [EF] ?

BE = EF = FC = 10 cm.

d. Calcule AC^2 puis déduis-en AF^2.

Dans le triangle ABC rectangle en B,

D'après le théorème de Pythagore, on a:

$AC^2 = BA^2 + BC^2$

$AC^2 = 3^2 + 5^2$

$AC^2 = 9 + 25$

$AC^2 = 34$.

Dans le triangle ACF rectangle en C,

D'après le théorème de Pythagore, on a:

$AF^2 = CA^2 + CF^2$

$AF^2 = 34 + 10^2$

$AF^2 = 34 + 100$

$AF^2 = 134$

e. Calcule AE^2.

Dans le triangle ABE rectangle en B,

D'après le théorème de Pythagore, on a:

$AE^2 = BA^2 + BE^2$

$AE^2 = 3^2 + 10^2$

$AE^2 = 9 + 100$

$AE^2 = 109$.

f. Le triangle AEF est-il rectangle ?

Dans le triangle AEF, [AF] est le côté le plus grand.

On calcule séparément AF^2 et $EA^2 + EF^2$.

$AF^2 = 134$

$EA^2 + EF^2 = 109 + 5^2$

$EA^2 + EF^2 = 109 + 25$

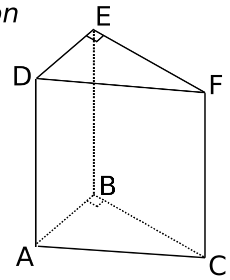
$EA^2 + EF^2 = 134$

On constate que $AF^2 = EA^2 + EF^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AEF est rectangle en E.

11 *Dans l'espace : généralisation*

On considère le prisme droit ci-contre : sa base ABC est un triangle rectangle en B.



On pose maintenant :
AB = x ; BC = y et FC = h.

a. Exprime AC^2 en fonction de x et y.

Dans le triangle ABC rectangle en B,

D'après le théorème de Pythagore, on a:

$AC^2 = BA^2 + BC^2$

$AC^2 = x^2 + y^2$.

b. Déduis-en AF^2 en fonction de x, y et h.

Dans le triangle ACF rectangle en C,

D'après le théorème de Pythagore, on a:

$AF^2 = x^2 + y^2 + h^2$.

c. Exprime AE^2 en fonction de x et de h.

Dans le triangle ABE rectangle en B,

D'après le théorème de Pythagore, on a:

$AE^2 = BA^2 + BE^2$

$AE^2 = x^2 + h^2$.

d. À quelle longueur est égale EF ?

EF = BC = y

e. Déduis-en EF^2 en fonction de y.

$EF^2 = y^2$

f. Quel est, parmi EF^2, AE^2 et AF^2, le plus grand nombre ? Justifie.

AF^2 est égal à la somme des carrés de EF^2 et AE^2,

donc AF^2 est le plus grand nombre.

g. Démontre que AEF est rectangle en E quelles que soient les valeurs de x, y et h.

Dans le triangle AEF, [AF] est le côté le plus grand.

On calcule séparément AF^2 et $EA^2 + EF^2$

$AF^2 = x^2 + y^2 + h^2$

$EA^2 + EF^2 = x^2 + h^2 + y^2$

On constate que $AF^2 = EA^2 + EF^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AEF est rectangle en E.